Chapitre 2

Développements limités et applications

2.1 Comparaison locale des fonctions

2.1.1 Domination et prépondérance

Définition 2.1.1.

- *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que lensemble V est un voisinage de a si*

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \quad]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset V$$

- *On dit que V est un voisinage de $+\infty$ si*

$$\exists A \in \mathbb{R} \ : \quad]A, +\infty[\subset V$$

- *On dit que V est un voisinage de $-\infty$ si*

$$\exists B \in \mathbb{R} \ : \quad]-\infty, B[\subset V$$

On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ s'il existe V, un voisinage de a, tel que f est définie sur $V \setminus \{a\}$. Par exemple, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie au voisinage de 0.

Propriété

Si V_1 et V_2 sont deux voisinages de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de a.

Définition 2.1.2. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*
On dit que f est **dominée** *par g s'il existe une fonction b définie au voisinage de a telle que*

- *$f(x) = b(x)g(x)$ au voisinage de a ;*
- *b est bornée au voisinage de a.*

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$, ou bien $f = \underset{a}{O}(g)$.
On lit « $f(x)$ égale grand O de $g(x)$ au voisinage de a ».

Définition 2.1.3. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*
On dit que f est **négligeable** *devant g s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a telle que*

- *$f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ au voisinage de a ;*

– $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note alors $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$, *ou bien* $f = \underset{a}{o}(g)$.
On lit « $f(x)$ égale petit o de $g(x)$ au voisinage de a ».

Remarques 2.1.4.

– *La notation* $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$ *et* $f(x) = \underset{x \to a}{o}(g(x))$ *est appelée la* **notation de Landau**.
– *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors*

$$f(x) = \underset{x \to a}{O}(1) \Leftrightarrow f(x) \text{ est bornée au voisinage de } a$$
$$f(x) = \underset{x \to a}{o}(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

Exemples 2.1.5.

– $x^2 = \underset{x \to 0}{O}(x)$
– $x^2 + 1 = \underset{x \to +\infty}{O}(x^2)$
– $x = \underset{x \to +\infty}{o}(e^x)$
– $e^x = \underset{x \to -\infty}{o}(x)$

Proposition 2.1.6 (Caractérisation de $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors*

$$f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x)) \Leftrightarrow \text{La fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

Démonstration.
$\Rightarrow$ | Si $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$, alors il existe une fonction b et un voisinage V de a tels que

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{a\} \quad f(x) = b(x)g(x) \text{ et } |b(x)| \leq M$$

Or, il existe un voisinage V' de a tel que $g(x) \neq 0,\ \forall x \in V' \setminus \{a\}$. Alors, en notant $W = V \cap V'$, on a

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in W \setminus \{a\} \quad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq M$$

D'où la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
$\Leftarrow$ | On suppose que $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On pose $b(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Alors il existe V, voisinage de a, tel que

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{a\} \quad |b(x)| \leq M$$

D'où

$$\exists M > 0 \quad \forall x \in V \setminus \{a\} \quad f(x) = b(x)g(x) \text{ et } |b(x)| \leq M$$

Par suite $f(x) = \underset{x \to a}{O}(g(x))$. □

Exercice 2.1.7. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0, telles que* $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f(x) = \underset{x\to 0}{O}(g(x))$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Proposition 2.1.8 (Caractérisation de $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors*

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \;\Leftrightarrow\; \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Démonstration.
$\Rightarrow$ | g ne s'annule pas au voisinage de a, donc il existe V, voisinage de a, tel que $g(x) \neq 0$, $\forall x \in V \setminus \{a\}$. De plus, comme $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, alors il existe V', voisinage de a, et $\varepsilon : V' \to \mathbb{R}$, tels que $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$ et

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \quad \forall x \in V' \setminus \{a\}$$

En notant $W = V \cap V'$, on obtient $\quad \varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in W \setminus \{a\}$.

Par conséquent $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
$\Leftarrow$ | Il existe V, voisinage de a, tel que g ne s'annule pas sur V et

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \quad \forall x \in V \setminus \{a\}$$

En posant $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad \forall x \in V \setminus \{a\}$, on a $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$. D'où $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$. $\square$

Remarque 2.1.9. *Si $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$, alors $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$. Mais la réciproque est fausse en général.*

Opérations sur les relations O et o

Proposition 2.1.10. *Soient f, g, et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
– $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ *et* $g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x))$
– $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *et* $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$
– $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ *et* $g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$
– $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *et* $g(x) = \underset{x\to a}{O}(h(x)) \;\Rightarrow\; f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$

Démonstration. Exercice. $\square$

Proposition 2.1.11. *Soient f_1, f_2, g, g_1, et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors*
– $f_1(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ *et* $f_2(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \;\Rightarrow\; (f_1(x) + f_2(x)) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$
– $f_1(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ *et* $f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \;\Rightarrow\; (f_1(x) + f_2(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$
– $f_1(x) = \underset{x\to a}{O}(g_1(x))$ *et* $f_2(x) = \underset{x\to a}{O}(g_2(x)) \;\Rightarrow\; f_1f_2(x) = \underset{x\to a}{O}(g_1g_2(x))$
– $f_1(x) = \underset{x\to a}{o}(g_1(x))$ *et* $f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_2(x)) \;\Rightarrow\; f_1f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_1g_2(x))$
– $f_1(x) = \underset{x\to a}{O}(g_1(x))$ *et* $f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_2(x)) \;\Rightarrow\; f_1f_2(x) = \underset{x\to a}{o}(g_1g_2(x))$

Démonstration. Exercice. $\square$

Exercice 2.1.12. *Soient α, β, et γ des réels strictements positifs. Montrer que*

$$(\ln(x))^\gamma = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\alpha) \qquad x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\beta x})$$

$$(\ln(x))^\gamma = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad e^{\beta x} = \underset{x\to-\infty}{o}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

2.1.2 Fonctions équivalentes

Définition 2.1.13. *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a.*
On dit que f est **équivalente** *à g s'il existe une fonction h définie au voisinage de a telle que*

- $f(x) = h(x)g(x)$ *au voisinage de a ;*
- $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1.$

On note alors $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, ou bien $f \underset{a}{\sim} g$.
On lit « $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage de a ».

Remarque 2.1.14. *$f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ si et seulement si $f(x) = g(x) + o(g(x))$ au voisinage de a.*

Exemples 2.1.15.

1. $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$
2. $x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$
3. $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{k} a_k x^k \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ *(avec $a_n \neq 0$).*

Proposition 2.1.16. *La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. Soient f, g, et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Réflexivité. On a $f(x) = 1 \times f(x)$, et $\lim\limits_{x\to a} 1 = 1$. Alors $f(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
Symétrie. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$, alors il existe V voisinage de a et une fonction $u : V \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ et $f(x) = u(x)g(x), \forall x \in V \setminus \{a\}$. Comme $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ alors il existe un voisinage $V' \subset V$ tel que $\forall x \in V' \setminus \{a\}$, $u(x) > 0$. D'où

$$g(x) = \frac{1}{u(x)} f(x) \quad \forall x \in V'$$

Or, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{u(x)} = 1$, alors $g(x) \underset{a}{\sim} f(x)$.
Transitivité. Si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $g(x) \underset{a}{\sim} h(x)$, alors il existe V voisinage de a et deux fonctions $u : V \to \mathbb{R}$ et $v : V \to \mathbb{R}$, tels que

$$f(x) = u(x)g(x), \quad g(x) = v(x)h(x), \quad \forall x \in V \setminus \{a\} \quad \text{avec } \lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = 1$$

Il s'ensuit que $f(x) = u(x)v(x)h(x), \forall x \in V \setminus \{a\}$ avec $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x) = 1$.
Par conséquent, $f(x) \underset{a}{\sim} h(x)$. □

Proposition 2.1.17 (Caractérisation de $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a. Alors*

$$f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.1.18. *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

- *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.*
- *Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors les fonctions f et g sont de même signe au voisinage de a.*

Démonstration.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors il existe un voisinage V de a et une fonction $h : V \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ et $f(x) = h(x)g(x), \forall x \in V \setminus \{a\}$.
  Par suite, si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) \times \lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors il existe un voisinage V de a et une fonction $h : V \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$ et $f(x) = h(x)g(x), \quad \forall x \in V \setminus \{a\}$.
  Comme $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$, alors il existe V' voisinage de a tel que si $x \in V' \setminus \{a\}$ alors $h(x) > 0$. En notant $W = V \cap V'$, on obtient
  $$f(x) = h(x)g(x) \quad \text{et} \quad h(x) > 0, \quad \forall x \in W \setminus \{a\}$$
  D'où f et g sont de même signe sur $W \setminus \{a\}$.

□

Opérations sur les fonctions équivalentes

Proposition 2.1.19. *Soient f_1, f_2, g_1, et g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$, telles que $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$. Alors*

1. *$f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$*
2. *Si, de plus, f_2 et g_2 ne s'annulent pas au voisinage de a, alors $\dfrac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1}{g_2}$*
3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, si f_1 et g_1 sont* **strictement positives** *au voisinage de a alors $[f_1]^\alpha \underset{a}{\sim} [g_1]^\alpha$.*

Démonstration. Exercice. □

Remarque 2.1.20. *En général, $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ n'implique pas $f_1 + g_1 \underset{a}{\sim} f_2 + g_2$ ni $h \circ f_1 \underset{a}{\sim} h \circ g_1$, comme le montrent les exemples suivants :*

1. *$x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x$ et $-x \underset{+\infty}{\sim} -x$, mais $\sqrt{x}$ et 0 ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.*
2. *$x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais e^{x+1} et e^x ne sont pas équivalents au voisinage de $+\infty$.*

Proposition 2.1.21 (Equivalents classiques en 0)**.**

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \ \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{x^2} \qquad \tan(x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\mathrm{sh}(x) \underset{0}{\sim} x \qquad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^2} \qquad \tanh(x) \underset{0}{\sim} x$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.1.22 (Composition des fonctions équivalentes)**.** *Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit h une fonction définie au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$, telle que $h(x) \neq a$ au voisinage de b. Alors*

$$\text{Si } f \underset{a}{\sim} g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to b} h(x) = a, \quad \text{alors} \quad f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$$

Démonstration. Comme $f \underset{a}{\sim} g$ alors il existe V voisinage de a et une fonction $u : V \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ tels que $f(x) = u(x)g(x)$, $\forall x \in V \setminus \{a\}$, et $\lim_{x \to a} u(x) = 1$.
Or, $\lim_{x \to b} h(x) = a$, alors il existe W voisinage de b tel que $h(x) \in V$, $\forall x \in W \setminus \{b\}$. Comme $h(x) \neq a$ au voisinage de b, on peut supposer que $h(x) \in V \setminus \{a\}$, $\forall x \in W \setminus \{b\}$. Il s'ensuit que

$$f(h(x)) = u(h(x))g(h(x)), \quad \forall x \in W \setminus \{b\}$$

Par composition de limites, on a $\lim_{x \to b} u(h(x)) = 1$, d'où $f \circ h \underset{b}{\sim} g \circ h$. □

2.2 Développements limités

2.2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.2.1 (Développement limité)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f admet un* **développement limité** *d'ordre n en x_0 (en abrégé $DL_n(x_0)$) s'il existe $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + \underset{x_0}{o}((x - x_0)^n) \qquad \text{au voisinage de } x_0 \tag{2.1}$$

où $\underset{x_0}{o}((x - x_0)^n) = \varepsilon(x)(x - x_0)^n$, avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Le polynôme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ est appelé la **partie régulière** *du $DL_n(x_0)$ de f.*
S'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut écrire $o((x - x_0)^n)$ au lieu de $\underset{x_0}{o}((x - x_0)^n)$.

Exemple 2.2.2. *On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$, définie au voisinage de 0. Montrons que f admet en 0 un développement limité d'ordre n sous la forme*

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

Pour ce faire, soit $x \neq 1$, et notons $S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. Alors $xS_n = x + x^2 + \cdots + x^{n+1}$. D'où $S_n - xS_n = 1 - x^{n+1}$. Par suite $S_n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x} \\ &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n \varepsilon(x) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(x) = \dfrac{x}{1-x}$. *Or,* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, *alors* $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$.

Exemple 2.2.3. *On considère la fonction* $f : x \mapsto x + x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, *définie au voisinage de* 0. f *admet en* 0 *un développement limité d'ordre* 0, *sous la forme*

$$f(x) = 0 + o(1)$$

Mais f *n'admet pas en* 0 *de développement limité d'ordre* 1. *En effet, si on suppose que* f *admet en* 0 *un développement limité sous la forme*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$$

alors il existe une fonction ε, *définie au voisinage de* 0, *telle que* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ *et*

$$x + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 x + x\varepsilon(x) \quad \textit{au voisinage de } 0.$$

En passant à la limite, on obtient $a_0 = \lim\limits_{x\to 0}\left[x + x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - a_1 x - x\varepsilon(x)\right] = 0$. *D'où*

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = a_1 + \varepsilon(x) - 1, \quad \forall x \neq 0$$

Par suite $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = a_1 - 1$. *Ce qui est absurde.*

Proposition 2.2.4 (Unicité du DL)**.** *Si* f *admet un développement limité d'ordre* n *en* x_0, *alors celui-ci est unique.*

Démonstration. Soient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$$

deux $DL_n(x_0)$ de f. Montrons que $a_k = b_k, \forall 0 \leq k \leq n$. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde. On suppose que l'ensemble $M = \{0 \leq k \leq n \ : \ a_k \neq b_k\}$ est non-vide, et on pose $d = \min(M)$. Alors, au voisinage de x_0, on a

$$a_d - b_d = \sum_{k=d+1}^{n} (b_k - a_k)(x-x_0)^{k-d} + o((x-x_0)^{n-d})$$

En passant à la limite, on obtient

$$a_d - b_d = \lim_{x\to x_0}\left[\sum_{k=d+1}^{n} (b_k - a_k)(x-x_0)^{k-d} + o((x-x_0)^{n-d})\right] = 0$$

Ce qui est absurde. D'où l'unicité du développement limité. □

Proposition 2.2.5.

1. *Une fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en x_0 si et seulement si f est prolongeable en une fonction continue en x_0, notée $\widetilde{f}$. Dans ce cas, le $DL_0(x_0)$ de f s'écrit*

$$f(x) = \widetilde{f}(x_0) + o(1)$$

2. *Une fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est prolongeable par une fonction $\widetilde{f}$ dérivable en x_0. Dans ce cas, le $DL_1(x_0)$ de f s'écrit*

$$f(x) = \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{f}'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Démonstration.

1. f est prolongeable par continuité par $\widetilde{f}$ si et seulement si $\widetilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, ce qui équivaut à $\lim_{x \to x_0} (f(x) - \widetilde{f}(x_0)) = 0$. Ceci équivaut à $f(x) = \widetilde{f}(x_0) + o(1)$.
2. $\Rightarrow$ | On suppose que f est prolongeable par une fonction dérivable en x_0, notée $\widetilde{f}$. D'après la proposition 1.1.3, on a

$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(x_0) + \widetilde{f}'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Alors f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0.
$\Leftarrow$ | On suppose que f admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, qui s'écrit

$$f(x) = l_1 + l_2(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Alors $l_1 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ et $l_2 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - l_1}{x - x_0}$. En posant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq x_0$ et $\widetilde{f}(x_0) = l_1$, la fonction $\widetilde{f}$ prolonge f par continuité. De plus, $\widetilde{f}$ est dérivable en x_0 et $\widetilde{f}'(x_0) = l_2$.

□

Proposition 2.2.6. *Soit f une fonction de classe C^n ($n \in \mathbb{N}$) sur un voisinage de x_0 (donc définie en x_0). Alors f admet un développement limité d'ordre n en x_0, et le $DL_n(x_0)$ de f s'écrit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n. □

Remarque 2.2.7. *La réciproque est fausse en général, comme le montre le contre-exemple suivant :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$$

f admet un $DL_2(0)$ puisque

$$f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \to 0$. *La fonction* f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée s'écrit*

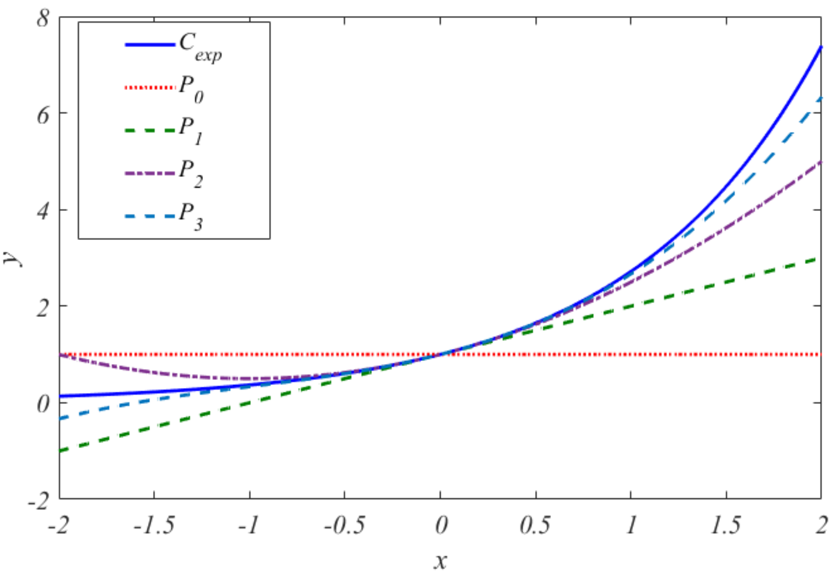
$$f' : x \mapsto \begin{cases} 3x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \textit{si } x \neq 0 \\ 0 & \textit{si } x = 0 \end{cases}$$

Or, f' *n'admet pas de limite en* 0, *donc* f *n'est pas de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2.8. *Le développement limité permet d'approximer une fonction par un polynôme, au voisinage d'un point* x_0. *Par exemple, le développement limité d'ordre* n *en* 0 *de la fonction* $x \mapsto e^x$ *est donné par la formule de Taylor-Young :*

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ &= P_n(x) + o(x^n) \end{aligned}$$

La figure ci-dessous représente la courbe représentative de $x \mapsto e^x$, *ainsi que celles des polynômes* P_n, *pour* $n = 0, 1, 2$, *et* 3. *La figure montre que* P_n *offre une approximation de plus en plus précise de* $x \mapsto e^x$ *au voisinage de* 0, *lorsque* n *prend des valeurs de plus en plus grandes.*



Proposition 2.2.9 (Troncature)**.** *Si* f *admet en* x_0 *un développement limité d'ordre* n *sous la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k + \underset{x_0}{o}((x - x_0)^n)$$

Alors, pour tout $0 \leq p < n$, f *admet un développemnt limité d'ordre* p *qui s'écrit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k(x - x_0)^k + \underset{x_0}{o}((x - x_0)^p)$$

Démonstration. Soit $0 \leq p < n$. Il existe une fonction ε, définie au voisinage de x_0, telle que

$\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$, et le $DL_n(x_0)$ de f s'écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^n \varepsilon(x) \\ &= \sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^p \left[\sum_{k=1}^{n-p} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^{n-p} \varepsilon(x) \right] \end{aligned}$$

On pose

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{n-p} a_k(x-x_0)^k + (x-x_0)^{n-p}\varepsilon(x) \qquad \text{au voisinage de } x_0$$

Alors, $\lim\limits_{x \to x_0} \mu(x) = 0$, et $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k(x-x_0)^k + \mu(x)(x-x_0)^p$.

Donc f admet un $DL_p(x_0)$. □

Proposition 2.2.10 (DL et parité)**.** *Soit f une fonction admettant un DL d'ordre n en 0. Si f est paire (resp. impaire), alors sa partie régulière ne comporte que les monômes de degré pair (resp. impair).*

Démonstration.

1. Soit f une fonction paire, dont le $DL_n(0)$ est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x_0}{o}(x^n)$$

Comme $f(-x) = f(x)$, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k + \underset{x_0}{o}((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + \underset{x_0}{o}(x^n)$$

Par l'unicité du développement limité, on obtient

$$a_k = (-1)^k a_k \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

D'où $a_k = 0$ lorsque n est impair.

2. Soit f une fonction impaire, dont le $DL_n(0)$ est donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x_0}{o}(x^n)$$

Comme $f(-x) = -f(x)$, alors

$$f(x) = -\sum_{k=0}^{n} a_k(-x)^k - \underset{x_0}{o}((-x)^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} a_k x^k + \underset{x_0}{o}(x^n)$$

Par l'unicité du développement limité, on obtient

$$a_k = (-1)^{k+1} a_k \quad \forall 0 \leq k \leq n$$

D'où $a_k = 0$ lorsque n est pair. $\square$

2.2.2 Développements limités usuels en 0

Les développements limités ci-dessous sont obtenus par la formule de Taylor-Young.

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\operatorname{ch}(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\operatorname{sh}(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8} x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1.1.3.5.\ldots(2n-1)}{2^n n!} x^n + o(x^n)
\end{aligned}$$

2.3 Opérations sur les développements limités

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir l'expression du $DL_n(x_0)$ d'une fonction (de classe C^n) en calculant ses dérivées successives au point x_0, ce qui est souvent une tâche laborieuse. Les opérations sur les développements limités permettent d'obtenir l'expression du $DL_n(x_0)$ d'une fonction à partir des DL usuels, sans passer par le calcul des dérivées successives.

Proposition 2.3.1 (Linéarité). *Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, sous la forme*

$$f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \qquad g(x) = Q_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où P_n et Q_n sont deux polynômes de degré $\leq n$, alors la fonction $\lambda f + g$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) admet le $DL_n(x_0)$ donné par

$$(\lambda f + g)(x) = (\lambda P_n + Q_n)(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

Démonstration. Exercice. □

Proposition 2.3.2 (Produit)**.** *Si f et g admettent des $DL_n(x_0)$, sous la forme*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k}_{P_n(x-x_0)} + o((x-x_0)^n) \qquad g(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k}_{Q_n(x-x_0)} + o((x-x_0)^n)$$

alors la fonction fg admet le $DL_n(x_0)$ donné par

$$(fg)(x) = R_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

où $R_n(x-x_0)$ est égal au produit $P_n(x-x_0)Q_n(x-x_0)$, auquel on a retiré tous les termes de degré $> n$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.3.3. *Les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \cos(x)$ admettent les $DL_3(0)$ suivants :*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Alors, le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est donné par

$$\begin{aligned} e^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + o(x^3) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

Exercice 2.3.4. *Calculer les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :*

$$x \mapsto \sin(x)\mathrm{ch}(x) \qquad\qquad x \mapsto \ln^2(1+x)$$

Proposition 2.3.5 (Composition)**.** *Soient f et g deux fonctions telles que*

1. *f admet en x_0 un développement limité d'ordre n, qui s'écrit*

$$f(x) = P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a_0$
3. *g admet en a_0 un développement limité d'ordre n, qui s'écrit*

$$g(y) = Q_n(y-a_0) + o((y-a_0)^n)$$

Alors, la fonction composée $g \circ f$ admet en x_0 un développement limité d'ordre n, donné par

$$g \circ f(x) = R_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

où $R_n(x - x_0)$ est égal à $Q_n(P_n(x - x_0) - a_0)$, auquel on a retiré tous les termes de degré $> n$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.3.6. *Déterminons le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$.*
La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet le $DL_3(0)$ suivant :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} \cos(x) = 1$, et la fonction $y \mapsto \ln(1 + y)$ admet le $DL_3(1)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$\ln(1 + y) = \ln(2) + \frac{1}{2}(y - 1) - \frac{1}{4}\frac{(y - 1)^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{(y - 1)^3}{6} + o((y - 1)^3)$$

On obtient le $DL_3(0)$ de la fonction composée $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$ en remplaçant y par $1 - \dfrac{x^2}{2}$ (la partie régulière du premier DL), ce qui donne

$$\begin{aligned}
\ln(1 + \cos(x)) &= \ln(2) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \frac{1}{4}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3}{6} + o(x^3) \\
&= \ln(2) - \frac{x^2}{4} + o(x^3)
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.7. *Calculer les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :*

$$x \mapsto \cos(\sin(x)) \qquad\qquad x \mapsto e^{e^x}$$

Corollaire 2.3.8 (Inverse)**.** *Soit u une fonction définie au voisinage de 0. On suppose que*

1. $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = 0$
2. *u admet en 0 un développement limité d'ordre n, qui s'écrit*

$$u(x) = P(x) + o(x^n)$$

Alors la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - u(x)}$ admet un $DL_n(0)$ donné par

$$\frac{1}{1 - u(x)} = R_n(x) + o(x^n)$$

où R_n est égal au polynôme $1 + P + P^2 + \cdots + P^n$, auquel on a retiré tous le termes de degré $> n$.

Exercice 2.3.9. *Calculer les $DL_3(0)$ des fonctions suivantes :*

$$x \mapsto \frac{1}{\cos(x)} \qquad\qquad x \mapsto \tan(x) \qquad\qquad x \mapsto \frac{1}{1+\ln(1+x)}$$

Pour le calcul du développement limité de $\dfrac{f}{g}$, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 2.3.10 (Division suivant les puissances croissantes)**.** *Soient A et B deux polynômes dans $\mathbb{R}[X]$. On suppose que le terme constant de B n'est pas nul ($B(0) \neq 0$). Soit $n \in \mathbb{N}$.*
Alors il existe un unique couple (Q_n, R_n) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$A = BQ_n + X^{n+1}R_n \qquad\qquad \textit{avec } \deg(Q_n) \leq n$$

Le polynôme Q_n est appelé le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A par B.

Démonstration. Voir le module Algèbre II. □

Exemple 2.3.11. *Pour $A = X^2 + X + 2$, $B = X^2 - X + 1$, et $n = 2$, le polynôme Q_n est calculé en éliminant à chaque itération le terme ayant le plus petit degré.*

$$\begin{array}{r|l}
- \quad X^2 + X + 2 & X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2}
2X^2 - 2X + 2 & 2 + 3X + 2X^2 \\ \cline{1-1}
- X^2 + 3X & \\
- \quad 3X^3 - 3X^2 + 3X & \\ \cline{1-1}
- 3X^3 + 2X^2 & \\
- \quad 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 & \\ \cline{1-1}
-2X^4 - X^3 &
\end{array}$$

On arrête la division lorsque tous les termes du reste ont un degré $> n$. Ainsi on obtient

$$Q_n = 2X^2 + 3X + 2 \qquad R_n = -2X - 1$$

Proposition 2.3.12 (Quotient)**.** *Si f et g admettent en 0 des développements limités d'ordre n, sous la forme*

$$f(x) = A_n(x) + o(x^n) \qquad g(x) = B_n(x) + o(x^n)$$

et si $\underset{x\to 0}{g}(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ admet en 0 un développement limité d'ordre n, donné par

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

où Q_n est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de A_n par B_n.

Démonstration. Exercice. □

Exemple 2.3.13. *Les $DL_3(0)$ des fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto 1+\ln(1+x)$ sont respectivement donnés par*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad 1+\ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Pour déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$, on effectue une division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 :

$$\begin{array}{rr|l}
 & x-\frac{x^3}{6} & 1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \\ \cline{3-3}
- & x+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3} & x-x^2+\frac{5}{3}x^3 \\ \cline{1-2}
 & -x^2+\frac{2}{3}x^3-\frac{x^4}{3} & \\
- & -x^2-x^3+\frac{x^4}{2}-\frac{x^5}{3} & \\ \cline{1-2}
 & \frac{5}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{x^5}{3} & \\
- & \frac{5}{3}x^3+\frac{5}{3}x^4-\frac{5}{6}x^5+\frac{5}{9}x^6 & \\ \cline{1-2}
 & -\frac{5}{2}x^4+\frac{1}{2}x^5-\frac{5}{9}x^6 &
\end{array}$$

On arrête la division quand tous les monômes du reste sont de degré > 3.
Alors le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ s'écrit

$$\frac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)} = x - x^2 + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)$$

Remarque 2.3.14. *On peut déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)}$ en remarquant que $\dfrac{\sin(x)}{1+\ln(1+x)} = \sin(x) \times \dfrac{1}{1-(-\ln(1+x))}$, et en appliquant le corollaire 2.3.8 à la fonction $u(x) = -\ln(1+x)$.*

Exercice 2.3.15. *Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x\cos(x)}$.*

Proposition 2.3.16 (Primitivation des DL)**.** *Soit f une fonction dérivable au voisinage de x_0, et continue en x_0. Si la dérivée de f admet un $DL_n(x_0)$ sous la forme*

$$f'(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n}_{P'(x)} + o((x-x_0)^n)$$

Alors f admet un $DL_{n+1}(x_0)$, donné par

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + a_0 x + a_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}}_{P(x)} + o((x-x_0)^{n+1})$$

Démonstration. Admise. □

Exercice 2.3.17. *Déterminer le* $DL_7(0)$ *de la fonction* $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Corollaire 2.3.18. *Si* f *admet un* $DL_n(x_0)$ *de partie régulière* P*, et si sa dérivée* f' *admet un* $DL_{n-1}(x_0)$ *de partie régulière* Q*, alors* $Q = P'$.

2.4 Développement asymptotique

2.4.1 Au voisinage de $\pm\infty$

Définition 2.4.1. *On dit que* f *admet un* **développement asymptotique** *(ou développement limité généralisé) d'ordre* n *au voisinage de* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) si la fonction* $g : t \mapsto f\left(\frac{1}{t}\right)$ *admet un développement limité d'ordre* n *en* 0 *à droite (resp. à gauche).*
De plus, si le $DL_n(0)$ *de* g *s'écrit*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + \underset{0}{o}(t^n)$$

Alors le développement asymptotique d'ordre n *de* f *est donné par*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \underset{\infty}{o}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Exemple 2.4.2. *Au voisinage de* $+\infty$*, on a*

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Au voisinage de $-\infty$*, on a*

$$\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

2.4.2 Fonction non-bornée

Définition 2.4.3. *Soit* f *une fonction définie au voisinage de* x_0*, telle que*

1. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *n'est pas finie ;*
2. *Il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^m f(x)$ *est finie.*

Soit p *le plus petit entier tel que* $\lim_{x\to x_0} (x - x_0)^p f(x)$ *est finie.*
On dit que f *admet un* **développement asymptotique** *d'ordre* n *en* x_0 *si la fonction* $x \mapsto (x - x_0)^p f(x)$ *admet un développement limité d'ordre* $n + p$ *en* x_0*, donné par*

$$(x - x_0)^p f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_{n+p}(x - x_0)^{n+p} + o((x - x_0)^{n+p})$$

Dans ce cas, le développement asymptotique d'ordre n en x_0 de f s'écrit

$$f(x) = \frac{a_0}{(x-x_0)^p} + \frac{a_1}{(x-x_0)^{p-1}} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{(x-x_0)} + a_p + a_{p+1}(x-x_0) + \cdots + a_{n+p}(x-x_0)^n$$
$$+o((x-x_0)^n)$$

Exemple 2.4.4. *Déterminons le développement asymptotique d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$.*
On a $\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{1}{\sin(x)}\right| = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin(x)} = 1$.
Alors, il suffit de déterminer le $DL_4(0)$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$.
Etant donné le $DL_5(0)$ de la fonction $\sin$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$$

On obtient de $DL_4(0)$ suivant, en divisant par x :

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

D'où

$$1 - \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + o(x^4)$$

Or $\dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{1}{1-\left(1-\frac{\sin(x)}{x}\right)}$*, alors, par le corollaire 2.3.8, on obtient*

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin(x)} &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^3 + \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^4 + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^4)\\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

En divisant par x, le développement asymptotique d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ est donné par

$$\frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7}{360}x^3 + o(x^3)$$

Exercice 2.4.5. *Déterminer le développement asymptotique d'ordre 1 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\ln(1+x)}$.*

2.5 Applications

2.5.1 Recherche d'équivalents

Proposition 2.5.1. *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en x_0, sous la forme*

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Alors

1. $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p (x - x_0)^p$

2. $f(x) \underset{x_0}{\sim} \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k$

Démonstration.
1. Comme $a_p \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto a_p(x - x_0)^p$ ne s'annule pas au voisinage de x_0. D'où

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{a_p(x - x_0)^p} &= \frac{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)}{a_p(x - x_0)^p} \\ &= 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x - x_0) + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x - x_0)^{n-p} + o((x - x_0)^{n-p}) \end{aligned}$$

Par suite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{a_p(x - x_0)^p} = 1$, ce qui équivaut à $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$.
2. De même, on a

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k}{a_p(x - x_0)^p} = 1 + \frac{a_{p+1}}{a_p}(x - x_0) + \cdots + \frac{a_n}{a_p}(x - x_0)^{n-p}$$

Alors $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k}{a_p(x - x_0)^p} = 1$. D'où $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$.

Par transitivité de la relation $\sim$, on obtient $f(x) \underset{x_0}{\sim} \displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k$. □

Corollaire 2.5.2. *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en x_0, sous la forme*

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \qquad \text{avec } a_p \neq 0$$

Si $\lim_{x \to x_0} \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k$ *existe, alors la limite de* f *en* x_0 *existe et*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k$$

Démonstration. $f(x) \underset{x_0}{\sim} \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k$, alors il suffit d'appliquer la proposition 2.1.18. □

Exemple 2.5.3. *Calculons* $\lim_{x \to 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \right)$.
Au voisinage de 0*, on a*

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = \frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} - e}{x}$$

Comme

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

alors

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

De plus, le $DL_1(1)$ *de* $y \mapsto e^y$ *s'écrit*

$$e^y = e + e(y-1) + o(y-1)$$

Par composition de développements limités, on obtient

$$e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e - e\frac{x}{2} + o(x)$$

Par suite, on obtient le développement limité d'ordre 0 *suivant :*

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2} + o(1)$$

Il s'ensuit que $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} = -\frac{e}{2}$.

2.5.2 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition 2.5.4. *Soit* f *une fonction définie sur un voisinage de* x_0*, et admettant un développement limité d'ordre* $n \geq 2$ *en* x_0*, donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \sum_{k=p}^{n} a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \qquad \text{avec } p \geq 2 \text{ et } a_p \neq 0$$

Alors la droite d'équation $y = a_0 + a_1(x-x_0)$ *est tangente à la courbe de* f *au point* $(x_0, f(x_0))$*. De plus, on a*

1. *Si* p *est pair et* $a_p > 0$*, alors* $\mathscr{C}_f$ *est située* **au dessus** *de sa tangente en* x_0.

2. *Si p est pair et $a_p < 0$, alors $\mathscr{C}_f$ est située* **au dessous** *de sa tangente en x_0.*
3. *Si p est impair, alors $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en x_0 : Le point $(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion.*

Démonstration. Comme $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) = \sum_{k=p}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$ et $a_p \neq 0$ alors $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0) \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$. Il s'ensuit que $f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)$ et $a_p(x - x_0)^p$ sont de même signe au voisinage de x_0.
• **1er cas.** Si p est pair et $a_p > 0$, alors $a_p(x - x_0)^p$ est positive au voisinage de x_0, d'où $f(x) > a_0 + a_1(x - x_0)$ au voisinage de x_0. Ce qui signifie que la courbe de f est au dessus de sa tangente.
• **2ème cas.** Si p est pair et $a_p < 0$, alors $a_p(x - x_0)^p$ est négative au voisinage de x_0, d'où $f(x) < a_0 + a_1(x - x_0)$ au voisinage de x_0. Ce qui signifie que la courbe de f est au dessous de sa tangente.
• **3ème cas.** Si p est impair, alors, par le même raisonnement, $f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0))$ change de signe au voisinage de x_0. □

Exercice 2.5.5. 1. *Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1 + e^x}$.*
2. *En déduire l'équation de la tangente à la courbe de f au point $(0, f(0))$.*
3. *Etudier la position de la courbe de f par rapport à sa tangente en $(0, f(0))$.*

2.5.3 Etude des branches infinies

Définition 2.5.6. *On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une* **asymptote** *à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$ si*

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax - b] = 0$$

Ce qui équivaut à

$$f(x) = ax + b + \underset{\pm\infty}{o}(1)$$

Exemple 2.5.7. *La fonction $x \mapsto xe^{\frac{1}{x}}$ admet au voisinage de $+\infty$ l'asymptote d'équation $y = x + 1$. En effet, comme*

$$e^{\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Alors

$$xe^{\frac{1}{x}} = x + 1 + \underset{+\infty}{o}(1)$$

Proposition 2.5.8 (Caractérisation de l'asymptote)**.** *La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $\pm\infty$ si et seulement si*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad et \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$$

Démonstration. Exercice. □

Définition 2.5.9.
1. On dit que la courbe de f admet une **branche parabolique** *de direction $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$ si*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = +\infty$$

2. On dit que la courbe de f admet une **branche parabolique verticale** *au voisinage de $\pm\infty$ si*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Exercice 2.5.10. *Etudier les branches infinies au voisinage de $+\infty$ de la courbe de la fonction $g : x \mapsto x^\alpha \cos\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) \quad (\alpha > 0)$.*

2.5.4 Caractérisation d'extremums

Proposition 2.5.11. *Soit f une fonction continue en x_0, et admettant un développement limité d'ordre $n \geq 2$ en x_0, donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \sum_{k=p}^{n} a_k(x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \qquad \text{avec } p \geq 2 \ \text{ et } \ a_p \neq 0$$

Si f admet un extremum local en x_0, alors $a_1 = 0$.
Réciproquement, si $a_1 = 0$, on a les cas suivants :

1. *Si p est pair et $a_p > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.*
2. *Si p est pair et $a_p < 0$, alors f admet un maximum local en x_0.*
3. *Si p est impair, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0.*

Démonstration. Comme f est continue en x_0 et f admet un $DL_1(x_0)$, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$. Par suite, si f admet un extremum local en x_0, alors $a_1 = f'(x_0) = 0$.
Réciproquement, si $a_1 = 0$, alors $f(x) - f(x_0) = f(x) - a_0 \underset{x_0}{\sim} a_p(x - x_0)^p$.
D'où $f(x) - f(x_0)$ et $a_p(x - x_0)^p$ sont de même signe au voisinage de x_0. Ce qui donne :

1. Si p est pair et $a_p > 0$, alors $f(x) - f(x_0) > 0$ au voisinage de x_0. Donc f admet un minimum local en x_0.
2. Si p est pair et $a_p < 0$, alors $f(x) - f(x_0) < 0$ au voisinage de x_0. Donc f admet un maximum local en x_0.
3. Si p est impair, alors $f(x) - f(x_0)$ n'a pas le même signe à gauche qu'à droite de x_0. Donc f n'admet pas d'extremum local en x_0.

□

Exercice 2.5.12. *Montrer que $f : x \mapsto x\dfrac{\sin(x)}{1 + x^2}$ admet un extrémum local en 0.*